

Teoría de la Comunicación

Problemas de repaso de procesos estocásticos

Ejercicio 1

Sean X e Y dos VA.s independientes entre sí y distribuidas ambas de forma gaussiana con media 0 y varianza 1/2. Calcule la fdp de Z , siendo $Z = X + Y$.

Ejercicio 2

Sean X e Y dos VA.s independientes entre sí y distribuidas ambas de forma uniforme $U(1,2)$. Calcule el valor medio de $Z = XY$.

Ejercicio 3

Sean X e Y dos VA.s discretas independientes entre sí y distribuidas ambas de forma uniforme $U(1,10)$. Si $f_{xy}(x,y)$ es la función de masa conjunta, calcule $f_{xy}(2,5)$ y $f_{xy}(2,11)$.

Ejercicio 4

Sea el proceso estocástico $X[n]$ definido por el conjunto de todas las posibles realizaciones $x[n]$, $1 \leq n \leq 10$, generadas mediante 10 lanzamientos independientes de un dado de 6 caras y valores $x \in \{1,2,3,4,5,6\}$. Obtenga:

- La función de distribución de la magnitud de $X[n]$ en el instante de tiempo n_1 . ¿Cuál es la probabilidad de observar una realización tal que $x[1] = 3$?
- La fdp conjunta en los instantes de tiempo n_1 y n_2 . ¿Cuál es la probabilidad de observar una realización tal que $x[1] = 3$ y $x[10] = 3$?
- La probabilidad de obtener una realización $x[n] = 1$, para todo $1 \leq n \leq 10$.
- La probabilidad de obtener una realización $x[n] > 3$, para todo $1 \leq n \leq 10$.

Ejercicio 5

Sea el proceso estocástico $X[n]$ definido por el conjunto de todas las posibles realizaciones $x[n]$, generadas mediante medidas independientes de un proceso uniforme cuyos valores se distribuyen como $X \sim U(-1,1)$. Obtenga:

- La función de distribución de la magnitud de $X[n]$ en el instante de tiempo n_1 .
- La función de distribución de la magnitud conjunta de $X[n]$ en los instantes de tiempo n_1 y n_2 , donde $n_1 \neq n_2$.
- $P(0 < X[n_1] \leq 0.5)$ dado un instante de tiempo n_1 .
- $P(0 < X[n_1] \leq 0.5, 0 < X[n_2] \leq 0.5)$, dados dos instantes de tiempo n_1 y n_2 .

Ejercicio 6

La fdp para cada instante temporal del proceso estocástico, estacionario y ergódico, $X(t)$, es una función uniforme $X \sim U(1, 2)$. Obtenga:

- La función de distribución de la magnitud de $x(t)$.
- La fracción de tiempo durante el cual $x(t) > 1.5$.
- La fracción de tiempo durante el cual $x(t) < 1.75$.
- El valor medio de $x(t)$.
- La potencia media de $x(t)$.

Ejercicio 7

¿Cuál es la autocorrelación $R_{xx}(\tau)$ de un proceso i.i.d (“independiente e idénticamente distribuido” = “independiente y estacionario”) $X[n]$ cuyas muestras se distribuyen según $X \sim N(0, \sigma_x^2)$? ¿Cuál es el sentido físico de $R_{xx}(0)$? ¿Cuál es su autocovarianza?

Ejercicio 8

¿Cuál es la autocorrelación $R_{yy}(\tau)$ de un proceso i.i.d $Y[n]$ cuyas muestras se distribuyen según $Y \sim N(m_y, \sigma_y^2)$? ¿Cuál es su autocovarianza?

Ejercicio 9

Sea el proceso $Z[n]$, definido como la suma de los procesos de los ejercicios anteriores, es decir, $Z[n] = X[n] + Z[n]$. ¿Cuál es su autocorrelación $R_{zz}(\tau)$? ¿Cuál es su autocovarianza?

Ejercicio 10

Sea el proceso $Z[n]$ cuyas realizaciones se distribuyen según una variable aleatoria Z . Si Z es función de la variable aleatoria $Y \sim N(m_y, \sigma_y^2)$, en concreto $Z = aY + b$, donde a y b son constantes, ¿cuál es su autocorrelación $R_{zz}(\tau)$? ¿Cuál es su autocovarianza?

Ejercicio 11

Sea el proceso incorrelacionado $X[n]$ cuyas muestras se distribuyen según $X \sim N(0, \sigma_x^2)$. Si definimos el proceso $Z[n]$ como $Z[n] = X[n] + X[n-1]$, es decir, una muestra de en una realización $z[n]$ contiene la suma de dos muestras consecutivas de la realización $x[n]$. ¿Cuál es la función de autocorrelación de $Z[n]$?

Ejercicio 12

Sean dos procesos estocásticos $X(t)$ e $Y(t)$, con funciones de densidad de probabilidad $f_X(x)$ y $f_Y(y)$, respectivamente. Demuestre que la correlación cruzada entre ambos procesos es el producto de las medias de $X(t)$ e $Y(t)$ (es decir, $m_x \cdot m_y$) para cualquier desplazamiento τ , si se cumplen las siguientes condiciones:

- Condición 1: $X(t)$ e $Y(t)$ son procesos estacionarios.
- Condición 2: $X(t)$ e $Y(t)$ son procesos independientes entre sí.

En su demostración, no olvide indicar de forma explícita y clara en qué momento utiliza estas dos condiciones.

Ejercicio 13

Sean $X(t)$ e $Y(t)$ dos procesos estacionarios con fdps uniformes $U_X \sim (0,4)$ y $U_Y \sim (4,8)$, respectivamente. Si los dos procesos son independientes entre sí:

- a) ¿Están $X(t)$ e $Y(t)$ incorrelacionados mutuamente?
- b) Calcule la covarianza entre $X(t)$ e $Y(t)$.
- c) Calcule la correlación cruzada entre $X(t)$ e $Y(t)$.
- d) Calcule la potencia media del proceso $Z(t) = X(t) + Y(t)$, justificando cada paso.

Ejercicio 14

Calcula la energía y la autocorrelación de la señal cuadrada $x(t)$ definida como:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

¿Cómo afecta el valor de T a la energía de $x(t)$?

Ejercicio 15

Dos procesos estacionarios $X(t)$ e $Y(t)$ tienen funciones densidad de probabilidad uniformes $X \sim U(0,1)$ e $Y \sim U(1,2)$, respectivamente. Los dos procesos son independientes entre sí. Se construye el proceso $Z(t) = X(t) + Y(t)$. Calcule la fdp de Z .

Ejercicio 16

Sea $N(t)$ un proceso de ruido gaussiano e incorrelacionado, cuya magnitud se distribuye con media 0 y varianza σ^2 . Calcula la distribución de la magnitud (como función del tiempo, es decir, en cada instante t), la media temporal de una realización, la media estadística en el instante t_1 , la potencia media, la autocorrelación y la densidad espectral de potencia de la señal:

$$s(t) = \cos(2\pi ft) + n(t)$$

Ejercicio 17

Sea $X(t)$ un proceso estocástico estacionario con muestras independientes y cuyos instantes temporales siguen una distribución normal de media 2 y varianza 3. Si se introduce en un canal de comunicaciones modelado como un sistema LTI con respuesta al impulso:

$$h(t) = \delta(t) + \frac{1}{2} \delta(t-1) + \frac{1}{10} \delta(t-2)$$

¿Cuál es la función de distribución de la magnitud del proceso a la salida del canal?

Ejercicio 18

Calcule la función de autocorrelación, autocovarianza y la potencia de los siguientes procesos estocásticos, supuestos ergódicos y con muestras independientes

- $X_1 \sim N(0,3)$.
- $X_2 \sim N(2,3)$.
- $X_3 \sim U(-0.5, 0.5)$.
- $X_4 \sim U(3,5)$.
- $X_5 = X_1 + X_2$, con X_1 y X_2 independientes.
- $X_6 = X_1 + X_2$, donde X_1 y X_2 son estadísticamente dependientes.
- $X_7 = X_2 + Y_1$, con $Y_1 \sim N(2,3)$ y X_2 e Y_1 independientes.
- $X_8 = 2 \cdot X_2$.
- $X_9 = X_3 + X_4$, con X_3 y X_4 independientes.
- $X_{10} = X_2 + X_4$, con X_2 y X_4 independientes.

Ejercicio 19

Sea un proceso estocástico ergódico con fdp $f(x) = 0,25 \delta(t) + 0,5 \delta(t-1) + 0,25 \delta(t-2)$ y muestras independientes. Calcule:

- La probabilidad de que $x > 0.5$ en la primera realización.
- La probabilidad de que $x > 0.5$ en $t = 1$.
- La fracción de tiempo en la que el proceso toma valores $x > 0.5$
- La probabilidad de que $x = 1$.
- La media del proceso.
- La varianza del proceso.
- La potencia media del proceso.
- La autocorrelación del proceso.
- La autocovarianza del proceso.

Ejercicio 20

Dibuje la FDM y la autocorrelación de las señales $x(t) = \cos(t)$ e $y(t) = \cos(2t)$.

Ejercicio 21

Sea el proceso $X[n]$ que consiste en tirar un dado de 6 caras infinitas veces. Calcular su función de autocorrelación y su función de autocovarianza.

Ejercicio 22

Una vez medida una realización completa de un proceso estocástico ergódico de media=1, se ha calculado que $\langle x^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T x^2(t) dt = 3$ para esa realización. Calcule el valor de la varianza de la VA. correspondiente al proceso en $t = 3$ (es decir, $\text{var}(X(3))$).